

SISTEMI AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet Crne Gore

Mapa kursa

Modelovanje

Klasifikacija sistema

Diferencijalne jednačine

Funkcija prenosa

- Polovi, nule, pojačanje
- Strukturni blok dijagrami

• Graf toka signala

Model u prostoru stanja

- Kanonične forme
- Linearizacija
- Rješavanje jednačina stanja

Analiza

Kontrolabilnost i

opservabilnost

Stabilnost sistema

- Raus
- Nikvist

Performanse SAU-a

- Stacionarno stanje
- Prelazni proces
- Kompleksni domen

Frekvencijske

karakteristike

- Bodeovi dijagrami

Dizajn

Specifikacije sistema

Kompenzatori

- Pojačavač
- Integralni kompenzator
- Diferencijalni kompenzator
- Diferencijalno - integralni kompenzator

PID regulator

Fizičke realizacije

Diskretizacija kontinualnih regulatora

Predavanje 5

Osobine sistema: kontrolabilnost, opservabilnost i stabilnost

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- ❖ Razumiju koncepte kontrolabilnosti i opservabilnosti
- ❖ Ispitaju kontrolabilnost i opservabilnost sistema koristeći različite kriterijume
- ❖ Shvate koncept stabilnosti - jedne od najznačajnijih osobina SAU-a
- ❖ Ispitaju apsolutnu stabilnost sistema koristeći Rausov kriterijum

Kontrolabilnost sistema

Posmatrajmo LTI sistem opisan u prostoru stanja:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).\end{aligned}$$

Definicija

Za LTI sistem kažemo da je potpuno kontrolabilan (upravljiv) ako postoji upravljački signal $\mathbf{u}(t)$ takav da pomjeri sistem iz bilo kog početnog stanja $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ u željeno stanje $\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}_1$, za neko konačno vrijeme t_1-t_0 .

Drugim riječima treba da postoji $\mathbf{u}(t)$ takav da važi:

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1 e^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Posmatrajući izraz iznad, uočava se da kontrolabilnost zavisi samo od matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$. Naš zadatak je da ispitamo koji uslov treba da zadovolje matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, tako da gornja jednačina uvijek bude zadovoljena.

Kontrolabilnost sistema

Za izvođenje uslova kontrolabilnosti koristićemo **Cayley-Hamiltonovu** teoremu, na osnovu koje se može tvrditi da se proizvoljna matrična eksponencijalna funkcija može zapisati kao linearna kombinacija njenih eksponentata do $(n-1)$ -og stepena:

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \alpha_0(\tau)\mathbf{I} + \alpha_1(\tau)\mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1}(\tau)\mathbf{A}^{n-1}.$$

Uvrštavanjem gornjeg izraza u izraz za jednačine stanja $\mathbf{x}(t)$, dobija se

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \int_0^{t_1} \left[\alpha_0(\tau)\mathbf{I} + \alpha_1(\tau)\mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1}(\tau)\mathbf{A}^{n-1} \right] \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Posljednja jednakost se može zapisati u matričnom obliku:

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \right] \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \dots \\ r_{n-1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} r_0 &= \int_0^{t_1} \alpha_0(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \\ r_1 &= \int_0^{t_1} \alpha_1(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \\ r_{n-1} &= \int_0^{t_1} \alpha_{n-1}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Kontrolabilnost sistema

Da bi sistem preveli iz stanja $\mathbf{x}_0$ u stanje $\mathbf{x}_1$, potrebno je riješiti prethodni sistem jednačina. Odnosno, prvo treba naći vektor $\mathbf{r}$, a zatim poznavajući $r_1, r_2, \dots, r_n$ odrediti upravljanje (upravljački signal) $\mathbf{u}(t)$.

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \dots \\ r_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{K}\mathbf{r}.$$

Međutim, u ovom kursu nas ne interesuje pronalaženje upravljanja $\mathbf{u}(t)$ koje prevodi sistem iz nekog početnog u željeno stanje, već nas samo zanima **pod kojim uslovima to upravljanje postoji**.

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{K}\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1} \left[e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \right]$$

Prethodna jednačina ima jedinstveno rješenje jedino pod uslovom da je matrica $\mathbf{K}$ invertibilna.

Kontrolabilnost sistema

Drugim riječima, sistem je **potpuno kontrolabilan** ako važi sljedeće:

$$\text{rank}(\mathbf{K}) = \text{rank}[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n,$$

$$\det(\mathbf{K}) \neq 0.$$

Ako je $\text{rank}(\mathbf{K}) = n - p$, onda da sistem ima **$n-p$ kontrolabilnih stanja**. Preostalih **p stanja nije kontrolabilno**, što znači da na njih ne možemo direktno ili indirektno da utičemo ulaznim signalom ili su ona linearna kombinacija preostalih $n-p$ kontrolabilnih stanja. U drugom slučaju sistem je premodelovan, odnosno usvojen je veći broj promjenljivih stanja nego što je potrebno. Ukoliko sistem nije potpuno kontrolabilan, tada se nekontrolabilne promjenljive stanja mogu identifikovati na osnovu simulacionog blok dijagrama.

Iako se u ovom kursu nećemo baviti dizajnom regulatora u vremenskom domenu, treba naglasiti da je kontrolabilnost sistema od krucijalne važnosti za mnoge upravljačke probleme, koji se upravo rješavaju projektovanjem u vremenskom domenu.

Primjer 1 - kontrolabilnost sistema

Ispitati kontrolabilnost sistema zadatog u prostoru stanja matricama:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

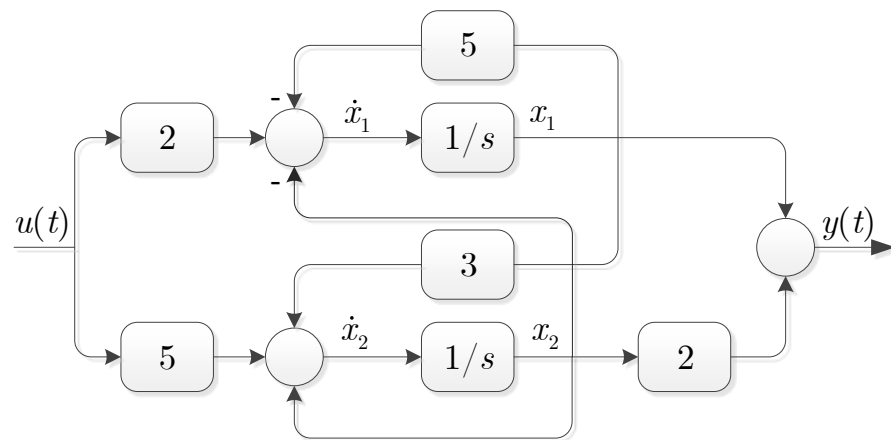
Determinanta matrice kontrolabilnosti je jednaka:

$$\det(\mathbf{K}) = \det[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \det \begin{bmatrix} 2 & -15 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} = 97,$$

što znači da je sistem potpuno kontrolabilan.

Posmatrajući kvazi-analogni dijagram sa slike uočava se da između stanja x_1 , x_2 i ulaza postoji direktna veza, što znači da je sistem kontrolabilan.

Napomena: veza između stanja može biti i indirektna. Odnosno, ulaz može da upravlja stanjem x_2 preko stanja x_1 .



```
A=[-5 -1; 3 1];  
B=[2; 5];  
K=[B A*B]  
K =  
     2    -15  
     5     11  
det(K)
```


Primjer 2 - kontrolabilnost sistema

Ispitati kontrolabilnost sistema zadatog u prostoru stanja matricama:

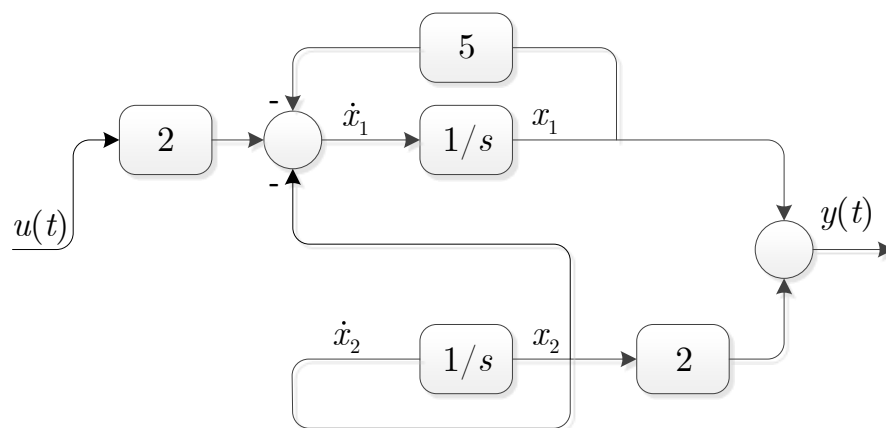
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrice kontrolabilnosti je jednaka:

$$\det(\mathbf{K}) = \det[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \det \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

što znači da sistem nije potpuno kontrolabilan.

Rang matrice $\mathbf{K}$ je jednak 1, što znači da sistem ima jedno upravljivo i jedno neupravljivo stanje. Sa kvazi-analognog blok dijagrama se vidi da stanje x_2 nije upravljivo jer nema vezu sa ulazom, niti sa stanjem x_1 .



```
A=[-5 -1;0 1];  
B=[2;0];  
K=[B A*B]  
det(K)  
rank(K)  
ans =  
1
```

Primjer 3 - kontrolabilnost sistema

Ispitati kontrolabilnost sistema zadatog u prostoru stanja matricama:

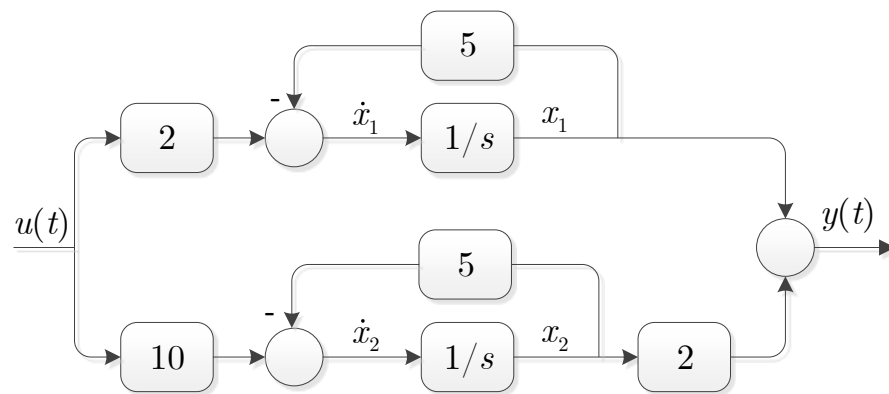
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrice kontrolabilnosti je jednaka:

$$\det(\mathbf{K}) = \det[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \det \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 10 & -50 \end{bmatrix} = 0.$$

što znači da sistem nije potpuno kontrolabilan.

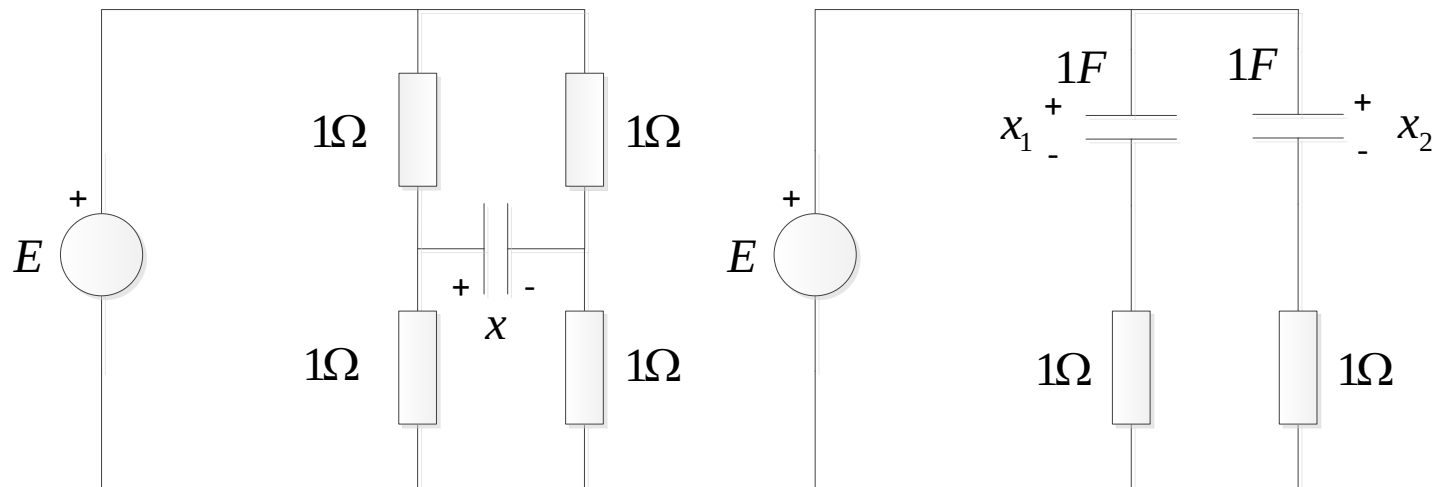
Posmatrajući kvazi-analogni dijagram vidi se da ulaz utiče na obje promjenljive stanja, međutim one nijesu linearno nezavisne. U svakom trenutku važi $x_2 = 5x_1$, što znači da ne postoji ulaz koji sistem može prevesti u bilo koje željeno stanje. Dakle, ovaj sistem je dovoljno modelovati jednom promjenljivom stanja.



```
A=[-5 0;0 -5];  
B=[2;4];  
K=[B A*B]  
det(K)  
rank(K)  
ans =  
1
```

Primjer 4 - kontrolabilnost sistema

Da li su električni sistemi sa slike kontrolabilni?



Za električno kolo na slici lijevo, stanje x nije kontrolabilno. Most se nalazi u ravnoteži, te je napon (x) uvijek jednak nuli, bez obzira na promjene ulaznog napona. Kolo na slici desno takođe nije potpuno kontrolabilno. Stanja x_1 i x_2 su uvijek jednaka, jer su vrijednosti otpornika i kondenzatora jednake. Oba kola bi bila kontrolabilna da bar jedan otpornik/kondenzator ima drugu vrijednost.

Opservabilnost sistema

Neka je LTI sistem u prostoru stanja zadat jednačinama:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).\end{aligned}$$

Definicija

Za LTI sistem kažemo da je potpuno opservabilan (osmotriv) ukoliko je na osnovu mjerenja izlaznog vektora $\mathbf{y}(t)$ u nekom konačnom intervalu t_1 - t_0 moguće rekonstruisati vektor početnih stanja $\mathbf{x}_0$.

Drugim riječima, postavlja se pitanje pod kojim uslovima možemo odrediti $\mathbf{x}(0)$, ako mjerimo izlazni signal u trenucima $t_1, t_2, \dots, t_n$?

Izlazni signal iz sistema u trenutku t je jednak:

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}u(t).$$

Opservabilnost sistema

Izlazni signal iz sistema u trenutku t je jednak:

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau + \mathbf{D}u(t).$$

Ako se gornja jednačina zapiše za n trenutka vremena, dobija se sljedeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned}y(t_1) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau + \mathbf{D}u(t_1) \\y(t_2) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t_2}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^{t_2} e^{\mathbf{A}(t_2-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau + \mathbf{D}u(t_2) \\&\dots \\y(t_n) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t_n}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^{t_n} e^{\mathbf{A}(t_n-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau + \mathbf{D}u(t_n)\end{aligned}$$

Opservabilnost sistema

$$\begin{aligned}
 y(t_1) - \mathbf{C} \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau - \mathbf{D} u(t_1) &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t_1} \mathbf{x}_0 \\
 y(t_2) - \mathbf{C} \int_0^{t_2} e^{\mathbf{A}(t_2-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau - \mathbf{D} u(t_2) &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t_2} \mathbf{x}_0 \\
 &\dots \\
 y(t_n) - \mathbf{C} \int_0^{t_n} e^{\mathbf{A}(t_n-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau - \mathbf{D} u(t_n) &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t_n} \mathbf{x}_0
 \end{aligned}$$

Ako se lijeva strana svake jednačine označi sa odgovarajućim q_i , a matrična eksponencijalna funkcija sa desne strane razvije u polinom koristeći Cayley-Hamiltonovu teoremu, može se zapisati sljedeće:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0(t_1) & \alpha_1(t_1) & \dots & \alpha_{N-1}(t_1) \\ \alpha_0(t_2) & \alpha_1(t_2) & \dots & \alpha_{N-1}(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0(t_n) & \alpha_1(t_n) & \dots & \alpha_{n-1}(t_n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \dots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{O}} \mathbf{x}(0) \longrightarrow \mathbf{x}_0 = \mathbf{O}^{-1} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{q}$$

Opservabilnost sistema

Nas trenutno ne zanima način pronalaženja vektora $\mathbf{x}_0$, već samo po pod kojima je to moguće odraditi. Jednačina

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{O}^{-1} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{q}$$

ima jedinstveno rješenje jedino pod uslovom da je matrica $\mathbf{O}$ invertabilna. Drugim riječima, sistem je **potpuno opservabilan** ako važi sljedeće:

$$\text{rank}(\mathbf{O}) = \text{rank}(\mathbf{O}^T) = \text{rank} \left[\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \mid \dots \mid \mathbf{A}^{T^{N-1}} \mathbf{C}^T \right] = n,$$

$$\det(\mathbf{O}) \neq 0.$$

Ako je $\text{rank}(\mathbf{O}) = n - p$, onda sistem ima $n-p$ opservabilnih stanja. Preostalih p stanja nije opservabilno, što znači ona nemaju direktnu ili indirektnu vezu sa izlazom ili su ona linearna kombinacija preostalih $n-p$ opservabilnih stanja.

Primjer 1 - opservabilnost sistema

Ispitati opservabilnost sistema zadatog u prostoru stanja matricama:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

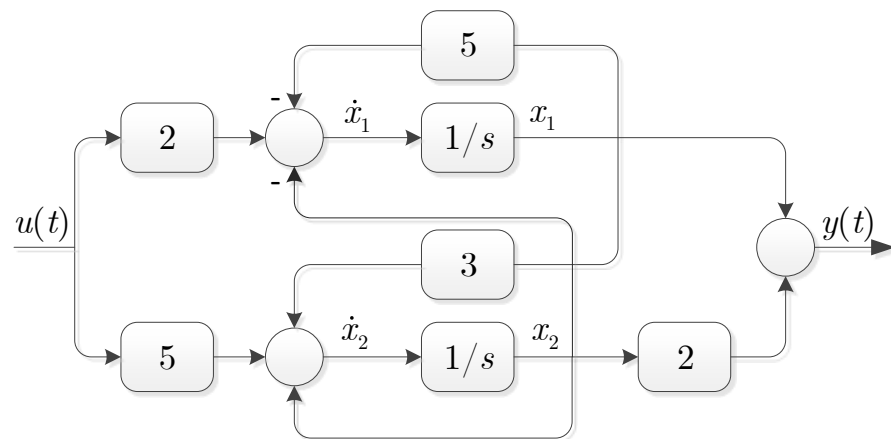
Determinanta matrice opservabilnosti je jednaka:

$$\det(\mathbf{O}) = \det[\mathbf{O} \mid \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T] = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1,$$

što znači da je sistem potpuno opservabilan.

Posmatrajući kvazi-analogni dijagram sa slike uočava se da između stanja x_1 , x_2 i izlaza postoji direktna veza, što znači da je sistem opservabilan.

Napomena: veza između stanja može biti i indirektna. Odnosno, stanje x_2 može biti povezano na izlaz preko stanja x_1 , i obrnuto.



```
A=[-5 -1;3 1];  
C=[1 2];  
O=[C' A'*C']  
O =  
     1     1  
     2     1  
det(O)
```


Primjer 2 - opservabilnost sistema

Da li je sistem zadat u prostoru stanja matricama **A**, **B** i **C** opservabilan?

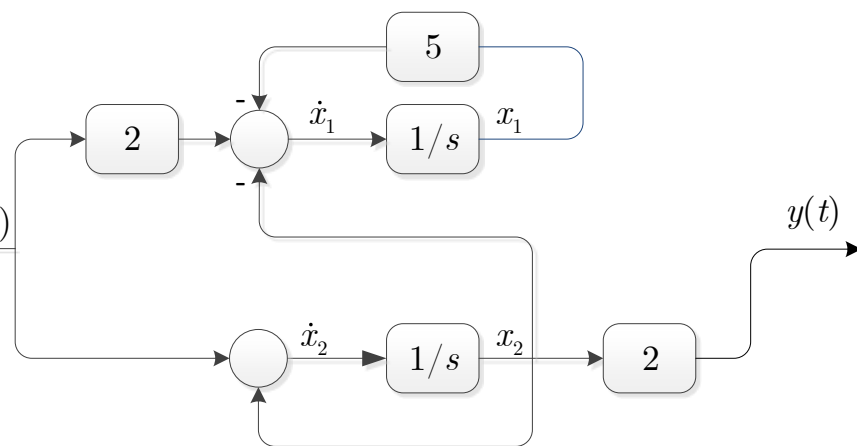
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinanta matrice opservabilnosti je jednaka:

$$\det(\mathbf{O}) = \det[\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T] = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

što znači da sistem nije potpuno opservabilan.

Rang matrice **O** je jednak 1, što znači da sistem ima jedno opservabilno i jedno neopservabilno stanje. Sa dijagrama se vidi da stanje x_1 nije opservabilno.



```
A=[-5 -1;0 1];  
C=[0 1];  
O=[C' A'*C']  
det(O)  
rank(O)  
ans =  
1
```

Primjer 3 - opservabilnost sistema

Ispitati opservabilnost sistema zadatog u prostoru stanja matricama:

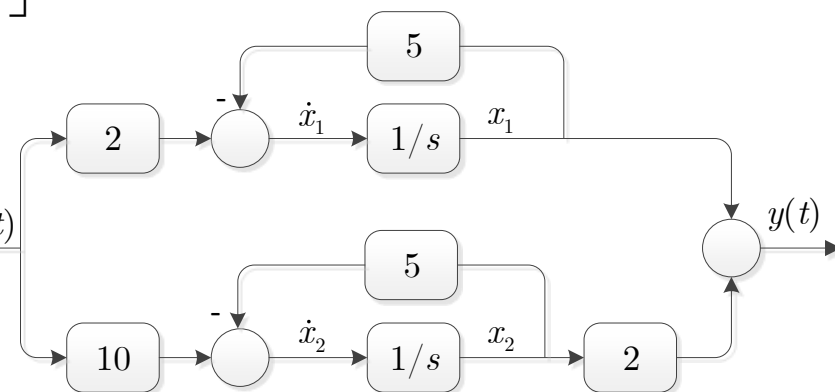
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrice opservabilnosti je jednaka:

$$\det(\mathbf{O}) = \det[\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T] = \det \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} = 0.$$

što znači da sistem nije potpuno opservabilan.

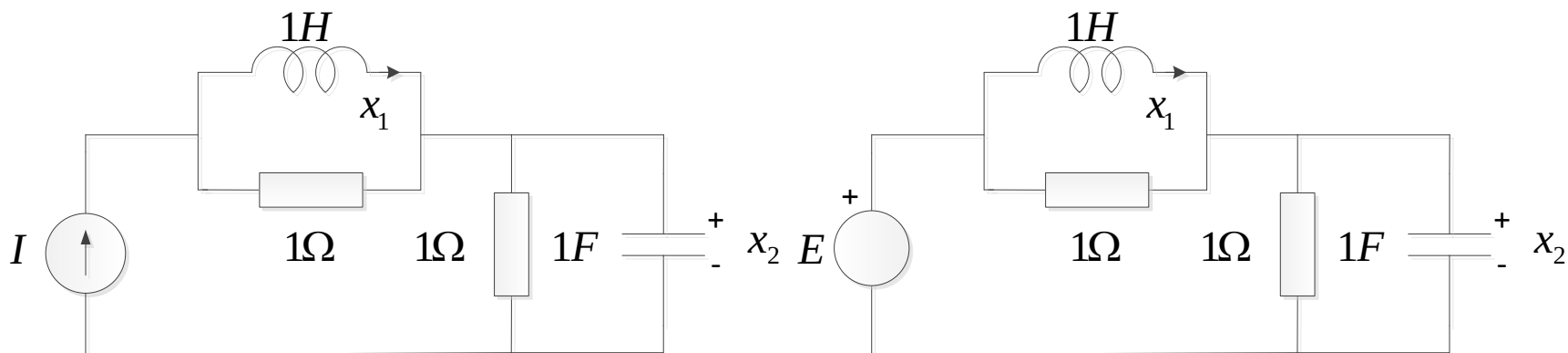
Posmatrajući kvazi-analogni blok dijagram uočava se da su obje promjenljive stanja direktno povezane na izlaz, međutim one nijesu linearno nezavisne. U svakom trenutku važi $x_2 = 5x_1$. Dakle, ovaj sistem je dovoljno modelovati jednom promjenljivom stanja.



```
A=[-5 0;0 -5];  
C=[1 2];  
O=[C' A'*C']  
det(O)  
rank(O)  
ans =  
1
```

Primjer 4 - opservabilnost sistema

Da li su električni sistemi sa slike opservabilni, ako kao izlaz posmatramo napon na kondenzatoru?



Za električno kolo na slici lijevo, jedino je stanje x_2 opservabilno. Njega svakako direktno mjerimo, jer je izlaz jednak naponu. Stanje x_1 nije opservabilno, jer izlaz (u ovom slučaju x_2) zavisi samo od ulaza, tj. od struje I , ali ne i od x_1 . Sa druge strane, kod električnog kola na slici desno oba stanja su opservabilna, jer se oba utiču na izlaz koji se mjeri. Opservabilnost se naravno može ispitati i analitički formiranjem modela u prostoru stanja i pronalaženjem determinante matrice opservabilnosti.

Kontrolabilnost i opservabilnost

O kontrolabilnosti i opservabilnosti se može zaključiti i u s -domenu. Neka je sistem zadat u prostoru stanja matricama $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$. Funkcija prenosa sistema:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Definicija

Ukoliko prilikom računanja funkcije prenosa dođe do skraćivanja nula i polova, to znači da sistem nije potpuno kontrolabilan ili opservabilan.

Na primjer, posmatrajmo sistem zadat funkcijom prenosa:

$$G(s) = \frac{s + 1}{(s + 1)(s + 2)}.$$

Ovaj sistem nije potpuno kontrolabilan ili nije potpuno opservabilan. Tek kad bi imali šemu fizičke realizacije mogli bi ispravno zaključiti koju od pomenutih osobina dati sistem ne posjeduje.

Stabilnost LTI sistema

Stabilnost je najvažnija osobina kojom treba da budu okarakterisani sistemi automatskog upravljanja. Iako intuitivno možemo shvatiti šta znači pojam stabilnosti, potrebna nam je matematička definicija na osnovu koje ćemo moći klasifikovati sisteme na stabilne i nestabilne.

Poznato je da se odziv sistema sastoji od dvije komponente – prirodnog i prinudnog odziva. U skladu sa tim, postoje dvije definicije stabilnosti. Prema prvoj definiciji sistem je stabilan ukoliko njegov prirodni odziv konvergira ka nuli (unutrašnja stabilnost sistema), dok je prema drugoj definiciji sistem stabilan ukoliko je njegov odziv na bilo koji ograničeni ulazni signal takođe ograničen (Bounded Input Bounded Output, BIBO stabilnost):

$$(\forall t) \mid u(t) \mid < M \Rightarrow (\exists N)(\forall t) \mid y(t) \mid < N.$$

Kod LTI sistema obje definicije vode do istih uslova za stabilnost, te ćemo u cilju definisanja tih uslova poći od BIBO definicije stabilnosti.

Stabilnost LTI sistema

Odziv LTI sistema čiji je impulsni odziv $g(t)$ je jednak:

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) u(t - \tau) d\tau.$$

Prema BIBO definiciji treba da bude zadovoljeno sljedeće:

$$|y(t)| = \left| \int_0^{\infty} g(\tau) u(t - \tau) d\tau \right| \leq N,$$

gdje je N neki cijeli broj. Koristeći nejednakost trougla, važi sljedeće:

$$|y(t)| = \left| \int_0^{\infty} g(\tau) u(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_0^{\infty} |g(\tau)| |u(t - \tau)| d\tau.$$

Kako je ulazni signal $u(t)$ po definiciji BIBO stabilnosti ograničen, to jest manji od M , dalje možemo zapisati:

$$|y(t)| = \left| \int_0^{\infty} g(\tau) u(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_0^{\infty} |g(\tau)| |u(t - \tau)| d\tau \leq M \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau.$$

Stabilnost LTI sistema

Da bi prethodni izraz bio ograničen, odnosno da bi sistem bio stabilan, impulsni odziv treba da bude apsolutno integrabilan:

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty.$$

Kod LTI sistema prethodni uslov se može dodatno pojednostaviti:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) < \infty.$$

Stabilnost sistema se može dovesti u vezu sa položajem polova funkcije prenosa sistema u s -ravni:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Polovi funkcije prenosa mogu biti: **čisto realni**, **čisto imaginarni** i **kompleksni**, pri čemu posebno treba posmatrati **pol koji leži u koordinatnom početku**. Svi polovi mogu biti **jednostruki** ili **višestruki**.

Stabilnost LTI sistema

Funkcija prenosa ima određen broj svih vrsta polova, te se može rastaviti na parcijalne razlomke:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} =$$
$$\sum_M \frac{A_i}{(s + \sigma_i)^{a_i}} + \sum_N \frac{B_i}{(s^2 + \omega^2)^{b_i}} + \sum_P \frac{C_i s + D_i}{[(s^2 + \omega^2) + \sigma^2 + \omega^2]^{c_i}} + \frac{D}{s^d}$$

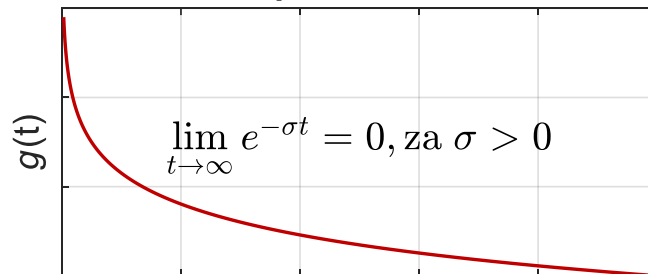
Impulsni odziv sistema je jednak inverznoj Laplasovoj transformaciji funkcije prenosa, odnosno njenih parcijalnih razlomaka. Da bi sistem bio stabilan impulsni odziv svakog sabirka mora biti apsolutno integrabilan.

U nastavku će biti prezentovani impulsni odzivi različitih funkcija prenosa prvog i drugog reda, u cilju donošenja generalnog zaključka o tome kako stabilnost sistema zavisi od položaja polova u kompleksnoj ravni.

Stabilnost LTI sistema

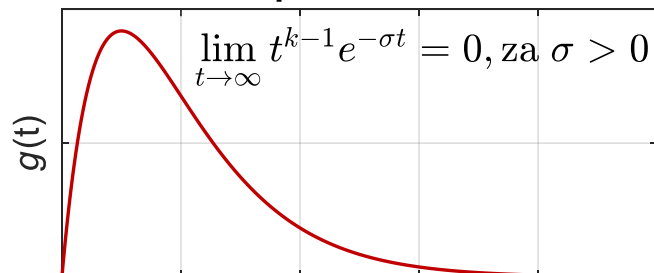
Vrsta pola	$G(s)$	$g(t)$
Realan i prost, $s = -\sigma$	$\frac{1}{s + \sigma}$	$e^{-\sigma t}$
Realan i višestruk, $s = -\sigma$	$\frac{1}{(s + \sigma)^k}$	$t^{k-1}e^{-\sigma t}$

Impulsni odziv



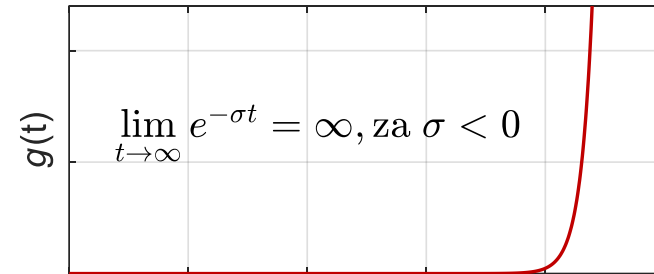
Vrijeme [s]

Impulsni odziv



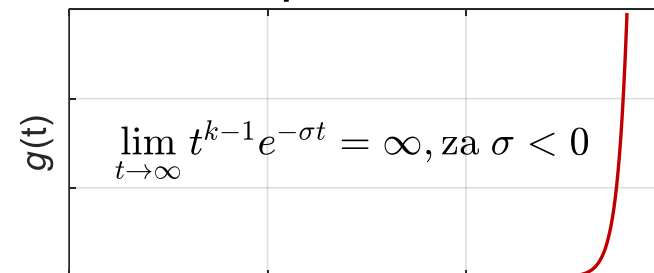
Vrijeme [s]

Impulsni odziv



Vrijeme [s]

Impulsni odziv

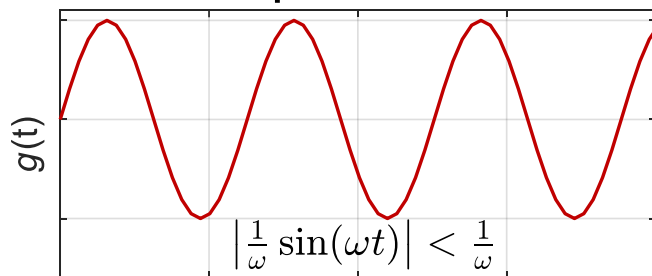


Vrijeme [s]

Stabilnost LTI sistema

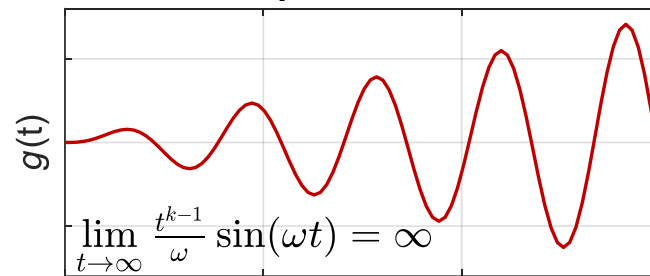
Vrsta pola	$G(s)$	$g(t)$
Čisto kompleksan i prost, $s = \pm j\omega$	$\frac{1}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$
Čisto kompleksan i višestruk, $s = \pm j\omega$	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^k}$	$\frac{t^{k-1}}{\omega} \sin(\omega t)$
Kompleksan i prost, $s = -\sigma \pm j\omega$	$\frac{1}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{-\sigma t} \sin(\omega t)$

Impulsni odziv



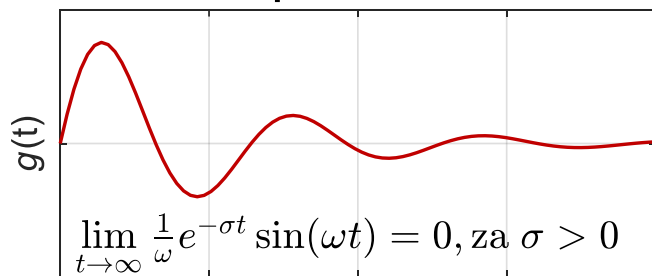
Vrijeme [s]

Impulsni odziv



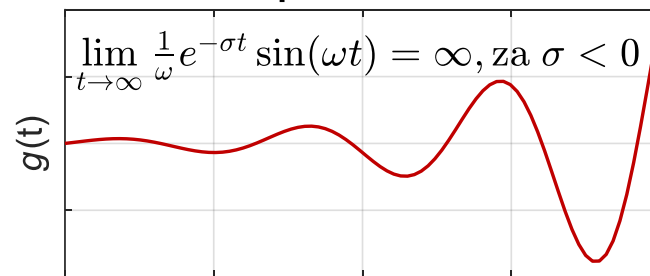
Vrijeme [s]

Impulsni odziv



Vrijeme [s]

Impulsni odziv

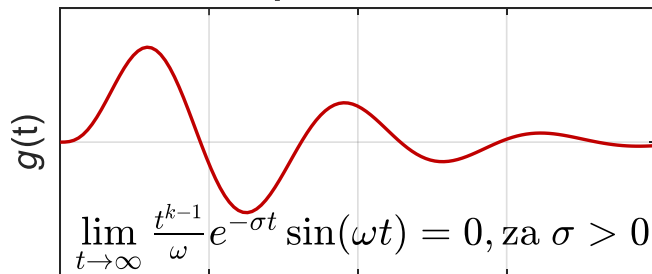


Vrijeme [s]

Stabilnost LTI sistema

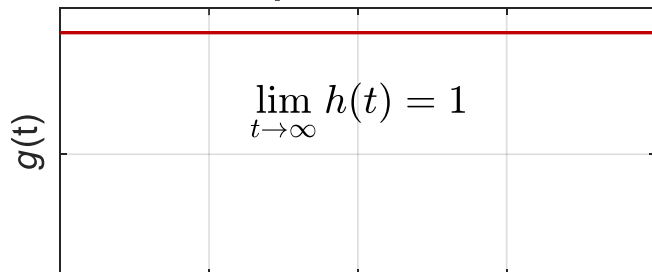
Vrsta pola	$G(s)$	$g(t)$
Kompleksan i višestruk, $s = -\sigma \pm j\omega$	$\frac{1}{[(s + \sigma)^2 + \omega^2]^k}$	$\frac{t^{k-1}}{\omega} \sin(\omega t)$
U koordinatom početku i prost, $s=0$	$\frac{1}{s}$	$h(t)$
U koordinatom početku i višestruk, $s=0$	$\frac{1}{s^k}$	$\frac{1}{(k-1)!} t^{k-1}$

Impulsni odziv



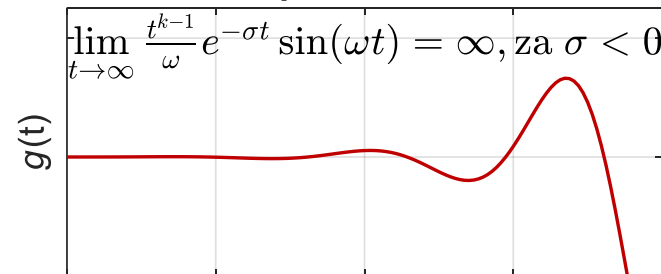
Vrijeme [s]

Impulsni odziv



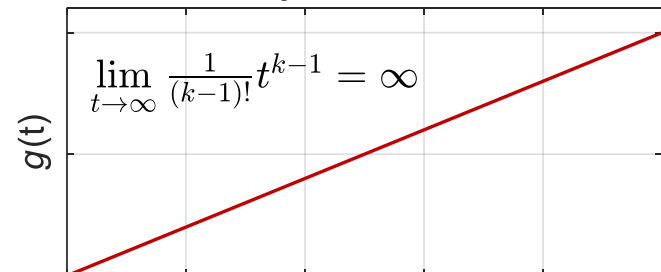
Vrijeme [s]

Impulsni odziv



Vrijeme [s]

Impulsni odziv



Vrijeme [s]

Stabilnost LTI sistema

Na osnovu definicije stabilnosti u vremenskom domenu i prethodno izloženih karakterističnih impulsnih odziva u zavisnosti od polova sistema, može se dati sljedeća definicija:

Definicija

Potreban i dovoljan uslov da kontinualni LTI sistem bude stabilan jeste da svi njegovi polovi leže u lijevoj poluravni s -ravni, odnosno da realni djelovi svih njegovih polova budu negativni. Ukoliko sistem ima konačan broj jednostrukih polova koji leže na imaginarnoj osi, tada se za sistem kaže da je na granici stabilnosti. Konačno, ako sistem ima bar jedan pol koji leži u desnoj poluravni s -ravni ili bar jedan višestruki pol koji leži na imaginarnoj osi, onda se za njega može reći da je nestabilan.

Impulsni odziv stabilnih LTI sistema konvergira ka nuli, dok impulsni odziv nestabilnih sistema teži ka beskonačnosti. Sistemi koji se nalaze na granici stabilnosti imaju impulsni odziv koji konvergira ka nekoj konačnoj vrijednosti ili koji osciluje.

Rausov kriterijum stabilnosti

Dakle, da bi ispitili stabilnost sistema potrebno je riješiti karakterističnu jednačinu sistema:

$$f(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0.$$

Ukoliko svi polovi sistema imaju negativan realni dio, onda možemo zaključiti da je sistem stabilan. Rausov kriterijum stabilnosti omogućava ispitivanje stabilnosti sistema bez rješavanja karakteristične jednačine. Na osnovu koeficijenata karakteristične jednačine formira se **Rausova tabela**. Prva kolona iz Rausove tabele se zove **Rausova kolona** i na osnovu nje se zaključuje o stabilnosti sistema.

Definicija

Dovoljan uslov stabilnosti sistema je da su svi koeficijenti u Rausovoj koloni istog znaka. Broj nestabilnih polova jednak je broju promjena znaka u Rausovoj koloni. Ukoliko su neki koeficijenti u Rausovoj koloni jednaki nuli, pri čemu su svi ostali istog znaka, onda se može zaključiti da se sistem nalazi na granici stabilnosti.

Rausov kriterijum stabilnosti

Rausova tabela se formira na sljedeći način. Naprije se popunjavaju prva i druga vrsta Rausove tabele i to na osnovu koeficijenata karakteristične jednačine. Ostale vrste se računaju na osnovu formula datih ispod.

Rausova
kolona

$$f(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0.$$

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\dots$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}, \dots$$

Primjer - Rausov kriterijum stabilnosti

Ispitati stabilnost sistema čija je karakteristična jednačina:

$$f(s) = s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 7s + 2.$$

Rausova tabela je data ispod.

Rausova
kolona

s^4	1	4	2
s^3	4	7	0
s^2	$9/4$	2	0
s^1	$15/9$	0	0
s^0	2	0	0

Sistem je stabilan jer nema promjena znaka u Rausovoj koloni.

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \frac{4 \cdot 4 - 1 \cdot 7}{4} = \frac{9}{4}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{4 \cdot 2 - 1 \cdot 0}{4} = 2$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9/4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{9/4 \cdot 7 - 4 \cdot 3}{9/4} = \frac{15}{9}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 9/4 & 2 \\ 15/9 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Primjer - Rausov kriterijum stabilnosti

Ispitati stabilnost sistema čija je karakteristična jednačina:

$$f(s) = s^4 + 7s^3 + 4s^2 + 4s + 2.$$

Rausova tabela je data ispod.

Rausova
kolona

s^4	1	4	2
s^3	7	4	0
s^2	$24/7$	2	0
s^1	$-1/12$	0	0
s^0	2	0	0

Sistem je nestabilan i ima dva nestabilna pola, jer postoje dvije promjene znaka u Rausovoj koloni.

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \frac{7 \cdot 4 - 1 \cdot 4}{7} = \frac{24}{7}$$

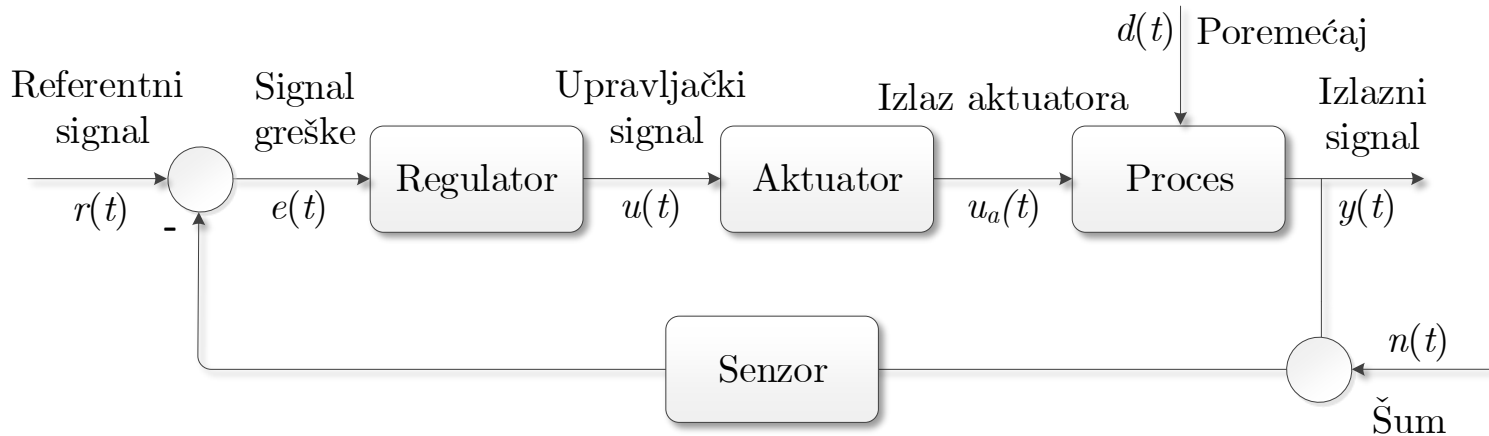
$$b_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{4 \cdot 2 - 4 \cdot 0}{4} = 2$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 24/7 & 2 \end{pmatrix} = \frac{24/7 \cdot 4 - 7 \cdot 2}{24/7} = \frac{-1}{12}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 24/7 & 2 \\ -1/12 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Stabilnost sistema

Na kraju se kratko osvrnimo na sisteme automatskog upravljanja, čija je osnovna upravljačka petlja prikazana na slici ispod.



Važno je napomenuti da proces ili objekat upravljanja u otvorenoj sprezi može biti stabilan (na primjer DC motor) ili nestabilan (na primjer model dobijen linearizacijom u okolini stacionarne tačke). Zatvaranjem povratne sprege po izlazu stabilni sistemi mogu da postanu nestabilni, ali isto tako nestabilni sistemi mogu da se ustabile. Stoga parametre regulatora prije svega treba podesiti tako da spregnuti sistem bude stabilan, a u nastavku kursa se će biti pokazano da se regulatorom mogu poboljšati još neke karakteristike sistema.